

2020年天津红桥区高三二模数学试卷

一、选择题

(本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

1. 已知集合 $A = \{x | |x| < 2\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

- A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{0, -1\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$

2. 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 其前 n 项和为 S_n , 且 $S_3 = 3a_3$, 则公比 $q = (\quad)$.

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 或 $-\frac{1}{2}$ D. -1 或 $\frac{1}{2}$

3. 已知 $a = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$, $b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, $c = \log_3 \frac{2}{3}$, 则 $(\quad)$.

- A. $b > a > c$ B. $a > b > c$ C. $c > b > a$ D. $a > c > b$

4. 设 $p: \log_2 x < 0$, $q: 2^{x-1} < 1$, 则 p 是 q 的 $(\quad)$.

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 若直线 $y = x - 2$ 被圆 $(x - a)^2 + y^2 = 4$ 所截的弦长为 $2\sqrt{2}$, 则实数 a 的值为 $(\quad)$.

- A. 0 或 4 B. -1 或 $\sqrt{3}$ C. 1 或 3 D. -2 或 6

6. 已知正方体的体积是 8, 则这个正方体的外接球的体积是 $(\quad)$.

- A. $2\sqrt{3}\pi$ B. $4\sqrt{3}\pi$ C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ D. $8\sqrt{3}\pi$

7. 将函数 $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的图象沿 x 轴向右平移 $m (m > 0)$ 个单位长度, 所得函数的图象关于 y 轴对称, 则 m 的最小值是 $(\quad)$.

- A. $-\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{12}$ C. $-\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{6}$

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点的距离为 4, 且双曲线的一条渐近线与抛物线的准线的交点坐标为 $(-2, -1)$, 则双曲线的焦距为 $(\quad)$.

- A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 4 D. $2\sqrt{5}$

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x > 0 \\ -x^2 - 2x, & x \leq 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - m$ 有三个零点, 则实数 m 的取值范围是 $(\quad)$.

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(0, 1)$ D. $[0, 1]$

二、填空题

(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

10. 若 i 为虚数单位, 则复数 $\frac{3}{(1-i)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 某学校三个社团的人员分布如下表 (每名同学只参加一个社团):

	合唱社	粤曲社	武术社
高一	45	30	a
高二	15	10	20

学校要对这三个社团的活动效果进行抽样调查，按分层抽样的方法从社团成员中抽取30人，结果合唱社被抽出12人，则这三个社团人数共有_____。

12. 已知二项式 $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式的二项式系数之和为32，则展开式中含 x 项的系数是_____。

13. 已知实数 a, b 满足条件： $ab < 0$ ，且1是 a^2 与 b^2 的等比中项，又是 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的等差中项，则 $\frac{a+b}{a^2+b^2} =$ _____。

14. 曲线 $y = x(3 \ln x + 1)$ ，在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为_____。

15. 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 是单位向量， $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 。若向量 $\vec{c}$ 满足 $|\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}| = 1$ ，则 $|\vec{c}|$ 的最大值是_____。

三、解答题

(本大题共5小题，每小题15分，共75分)

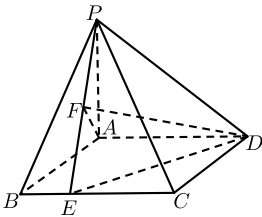
16. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ，已知 $a = 1, b = 2, \cos C = \frac{1}{4}$ 。

- (1) 求 c 的值。
- (2) 求 $\sin\left(2C + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值。

17. 设甲、乙两人每次射击命中目标的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{4}$ ，且各次射击互相独立。

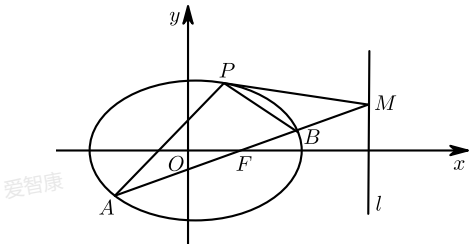
- (1) 若甲、乙两人各射击1次，求至少有一人命中目标的概率。
- (2) 若甲连续射击3次，设命中目标次数为 ξ ，求命中目标次数 ξ 的分布列及数学期望。

18. 四棱锥 $P - ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，四边形 $ABCD$ 是矩形，且 $PA = AB = 2, AD = 3, E$ 是线段 BC 上的动点， F 是线段 PE 的中点。



- (1) 求证： $PB \perp$ 平面 ADF 。
- (2) 若直线 DE 与平面 ADF 所成角为 30° ，
 - ① 求线段 CE 的长。
 - ② 求二面角 $P - ED - A$ 的余弦值。

19. 如图，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 离心率 $e = \frac{1}{2}$ ，直线 l 的方程为 $x = 4$ 。



- (1) 求椭圆C的方程；
- (2) AB是经过右焦点F的任一弦（不经过点P），设直线AB与直线l相交于点M，记PA, PB, PM的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 问:是否存在常数 λ ，使得 $k_1 + k_2 = \lambda k_3$ ．若存在求 λ 的值；若不存在，说明理由．

20. 函数 $f(x) = \ln x - ax, a \in \mathbf{R}$ ．

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间和极值．
- (2) 已知 $x_1 = \sqrt{e}$ 和 x_2 是函数 $f(x)$ 的两个不同的零点，求 a 的值并证明： $x_2 > e^{\frac{3}{2}}$ ．（其中e为自然对数的底数）